А. П. Буланов

Обнинск

О ПРИЛОЖЕНИЯХ ЦЕПНЫХ ЭКСПОНЕНТ И СТЕПЕНЕЙ

Оценивая количество публикаций и полученные в них результаты, можно отметить, что цепные экспоненты и степени вполне сопоставимы с широко известным теперь использованием цепных дробей. В работах А. А. Гончара, Е. М. Никишина и А. И. Аптекарева рассматриваются вопросы представления аналитических функций цепными дробями и интегрирование некоторых дифференциальных уравнений с помощью таких представлений.

1. Цепные степени и экспоненты — это один из способов представления аналитических функций восходящих к Л. Эйлеру [1], Д. Бернулли, Х. Гольдбаху [2], [3], Ламберту и др. Д. Бернулли в письме от 29 июня 1728 года сообщил Х. Гольдбаху, что есть лишь одна пара целых чисел, удовлетворяющая уравнению $x^y = y^x$, а именно $\{2; 4\}$, и что он нашел бесконечное множество пар, не являющихся целыми ("broken number"), которые удовлетворяют этому уравнению. Шесть месяцев спустя в ответном письме Х. Гольдбах сообщил следующее. Пусть $x^y = y^x$ и $y > x$, так, что $y = x \cdot s$, $s > 1$. Тогда $x^{sx} = (sx)^x$, откуда $x^s = sx$ и получаем функцию, заданную параметрически

$$x = s^{1/(s-1)}, \quad y = s^{s/(s-1)}. \tag{1}$$

Проблема Д. Бернулли имеет отношение к определению области сходимости цепной степени. Левая часть $r = x^{1/x}$ равенства $x^{1/x} = y^{1/y}$ при $1/e \leqslant x \leqslant e$ есть обратная функция относительно цепной степени $x = r^{r^{r\cdots}} \equiv \langle r; 1, 1, \ldots \rangle$,

$r \in [e^{-e}, e^{1/e}]$. В разделах 13 – 15 работы [1] Л. Эйлер для нахождения интервала сходимости последовательности (в обозначениях Л. Эйлера) $r, r^r, r^{r^r}, \ldots$ рассматривает два функциональных уравнения

$$r^{\varphi} = \varphi \quad \text{и} \quad r^{\psi} = \psi.$$

Одно и тоже значение r в интервале $(1, e^{1/e})$ получается при различных значениях φ и ψ, которые связаны уравнением

$$\ln r = \frac{\ln\varphi}{\varphi} = \frac{\ln\psi}{\psi} \quad \text{или} \quad r = \varphi^{1/\varphi} = \psi^{1/\psi}.$$

Далее, как у Д. Бернулли и Х. Гольдбаха, Эйлер полагает $\psi = p \cdot \varphi$ и получает в параметрической форме зависимость между φ и ψ через параметр p

$$\varphi = p^{\frac{1}{p-1}}, \quad \psi = p^{\frac{p}{p-1}}.$$

При этом

$$\ln r = \frac{1}{p-1} \cdot p^{-\frac{1}{p-1}} \cdot \ln p.$$

Полагая $\omega = p - 1$, Эйлер получает максимальное предельное значение

$$\ln \overline{r} = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{\omega} \cdot \ln(1+\omega) \cdot (1+\omega)^{-1/\omega} = 1/e.$$

Если x и y различны, положительны и удовлетворяют равенству $x^y = y^x$, то пару $\{x; y\}$ называют бернуллиевой парой. Андерсон [4] сформулировал об этом лемму.

Множество значений функции $f(x) = x^{1/x}$ есть отрезок $[0, e^{1/e}]$, она возрастает на $[0, e]$, убывает на $[e, \infty]$ и имеет абсолютный максимум в точке $x = e$. Если $x \in [1, e]$, то существует единственное число $y > e$, такое, что $f(x) = f(y)$. Кроме того, множество $\{x; y\}$ является бернуллиевой парой тогда и только тогда, когда $x \neq y$ и $f(x) = f(y)$.

В разделе 17, полагая $p = (n+1)/n$, Эйлер получает рациональные значения бернуллиевой пары

$$\varphi_n = \frac{(n+1)^n}{n^n}, \quad \psi_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}.$$

Эта пара обладает свойством $\psi_n < e < \psi_n$. И левая и правая части дают одну последовательность значений

$$\ln r_n = \frac{n^{n+1}}{n+1} \cdot \ln \frac{n+1}{n} \to \frac{1}{e} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

С. Гурвиц в работе [5] показал, что каждая бернуллиевая пара с рациональными значениями имеет такую форму.

О решении уравнения $x^y = y^x$ написано много статей. В работе И. Н. Галидакиса [6] имеются ссылки на следующих авторов: P. Franklin (1917), Y. S. Kupitz and H. Martini (2000), E. J. Moulton (1916), D. Sato (1972), H. L. Slobin (1931).

2. В статье А. Кноубела [7] (раздел 2, с. 238–239) говорится о применении степенных итераций в биохимии (ферментная кинематика). В теории Михаэлиса-Ментена (Michaelis-Menten) рассматривается интенсивность действия ферментов на субстрат. В частности исследуется (путем гидролиза и оптической ротации) действие ферментов, так называемых липазов, расщепляющих липиды (жиры и жироподобные вещества) в свиной печени на глицерин и жирные кислоты. Пусть параметр s — константа, определяемая исключительно свойствами субстрата и фермента, $\overline{x}$ и $\overline{y}$ — текущие концентрации субстратов, которые использованы в получении продуктов расщепления в различных реакциях, когда одна реакция протекает быстрее другой. Не вдаваясь в математические детали, эта теория говорит, что максимальный эффект достигается при соотношениях

$$\overline{x} = s^{\frac{1}{1-s}}, \quad \overline{y} = s^{\frac{s}{1-s}}.$$

Таким образом, если $\overline{x} = 1/x$ и $\overline{y} = 1/y$, то имеем соотношение $x^y = y^x$, которое рассматривалось выше в параметрической форме (1).

3. Ранее рассматривались дифференциальные уравнения первого порядка с правой частью в виде некоторой рациональной функции решение которых представляется в виде бесконечных цепных экспонент [8], [9]. Будем рассматривать движение материальной точки в момент времени t с координатами $(x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_m)$ в $(l+m)$-мерном фазовом пространстве R^{l+m} с вектором скорости $V = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_l, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_m)$. Это движение может быть вызвано, например, действием сил тяготения или благодаря интенсивному (потоковому) обмену веществом и энергией с окружающей средой в неравновесных условиях. Тогда координаты вектора скорости могут быть зависимыми от определенных факторов посредством некоторых рациональных функций φ_i, $i = 1, 2, \dots, l$, и ψ_k, $k = 1, 2, \dots, m$, аргументами которых является независимая переменная t и зависимые переменные $x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_m$, то есть следует рассматривать систему из $l+m$ дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_i = \varphi_i(t, x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_m), \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

$$\dot{y}_i = \psi_k(t, y_1, \dots, y_m), \quad k = 1, 2, \dots, m. \tag{2}$$

При этом дано, что при $t = 0$ координаты точки имеют начальные значения. Решением системы (2) может быть система из $l+m$ бесконечных цепных экспонент, каждая из которых с последовательностью показателей $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ вида

$$x(t) = a_0 \cdot e^{a_1 \cdot t \cdot e^{a_2 \cdot t \cdot e^{\cdots}}} \equiv a_0 \cdot \langle e^t; a_1, a_2, \dots \rangle.$$

При некотором определенном наборе рациональных функций φ_i и ψ_k с одинаковыми знаменателями вида $1-t^m\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_m$ ($\lambda_k\neq 0,\ k=1,2,\ldots,m$) решение может быть представлено системой циклических цепных экспонент с показателями из множества $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l,\lambda_1,\lambda_2,\cdot,\lambda_m\}$ в виде

$$\langle e^t;\alpha_i,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_l,\lambda_1,\lambda_2,\cdot,\lambda_m,\lambda_1,\lambda_2,\ldots\rangle$$

и в виде

$$\langle e^t;\lambda_k,\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_m,\lambda_1,\lambda_2,\cdot,\lambda_m,\lambda_1,\lambda_2,\ldots\rangle,$$

где $\alpha_l,\alpha_2,\ldots,\alpha_l$ — некоторые числа, отличные от нуля, фигурирующие в качестве коэффициентов в числителях рациональных функций.

4. В гравитационной механике трансцендентное уравнение Кеплера

$$E-\varepsilon\sin E=M \tag{3}$$

имеет исключительное значение. Оно связывает эксцентрическую аномалию эллиптического движения E, среднюю аномалию M и эксцентриситет ε. Действительное движение тела по эллиптической орбите и его видимое движение по круговой орбите (определяемое углом E) являются неравномерными, то есть его угловая скорость непостоянна. Однако мы можем приписать этим вращениям среднюю угловую скорость, выполнив усреднение за период. Тогда можно представить, что некоторая точка вращается равномерно со средней угловой скоростью по окружности и ее "видимое" положение определяется углом, который называется средней аномалией M. Кеплер впервые показал, что E и M всегда связаны уравнением (3). В работе [10] представлена полная новых открытий и драматизма история поиска точных и приближенных решений уравнения Кеплера и используемые при этом аналитические и численные методы. В работе [11] представлена новая форма явного решения уравнения Кеплера, основанная на использовании гиперфункции Ламберта. Функция Ламберта (Lambert J. H., 1728 – 1777) $W(x)$ является обратной к функции $y = x \cdot e^x$ и представляется посредством цепной экспоненты

$$x = y \cdot \langle e^y; -1, -1, \ldots \rangle.$$

Гиперфункция Ламберта $HW(\{f_i(x)\}_N; y)$ была введена в [12] как естественное обобщение функции Ламберта. Она предусматривает конкретный набор действительных опорных функций $\{f_i(x)\}_N$ (далее возьмем для $N = 3$) и является обратной к функции

$$y = x \cdot \exp(f_1(x) \cdot \exp(f_2(x) \cdot \exp(f_3(x))))$$

Эту функцию назовем исходной. Обратная к ней на первом шаге есть равенство

$$x = y \cdot \exp(-f_1(x) \cdot \exp(f_2(x) \cdot \exp(f_3(x)))).$$

На втором шаге следует вместо аргумента x под знаком функции f_i написать всю правую часть этого равенства. Тогда аргумент x окажется не ниже второго "этажа". На каждом шаге аргумент x поднимается на один "этаж" выше. Таким образом обобщение функции Ламберта ведет к обобщению понятия цепных экспонент.

Для решения уравнения Кеплера (3) представим его в экспоненциальном виде

$$E \cdot \exp\left[\ln(1 - \frac{\epsilon \sin E}{E})\right] = M \tag{4}$$

а его решение представляется гиперфункцией Ламберта с одной лишь опорной функцией $\ln\left(1-\frac{\epsilon\sin x}{x}\right)$. Чтобы написать из равенства (4) явное решение этого уравнения в форме гиперфункции Ламберта для определения E сделаем несколько итераций, используя эту опорную функцию. Имеем

$$E_1 = M\cdot\exp\left[-\ln\left(1-\frac{\epsilon\sin x}{x}\right)\right] \stackrel{def}{=} M\cdot\exp[I],$$

$$E_2 = M\cdot\exp\left[-\ln\left(1-\frac{\epsilon\sin\{M\cdot\exp[I]\}}{M\cdot\exp[I]}\right)\right] \stackrel{def}{=} M\cdot\exp[II],$$

$$E_3 = M\cdot\exp\left[-\ln\left(1-\frac{\epsilon\sin\{M\cdot\exp[II]\}}{M\cdot\exp[II]}\right)\right] \stackrel{def}{=} M\cdot\exp[III],$$

и т. д. Этот процесс можно продолжать неограниченно и если предел $\lim_{n\to\infty}E_n = E$ существует, то это решение запишем в форме гиперфункции Ламберта

$$E = HW\left(\left\{\ln\left(1-\frac{\epsilon\sin x}{x}\right)\right\}_1;M\right).$$

Уравнение (3) имеет бесконечное число комплексных решений и одно искомое действительное. При вычислении E для конкретных ϵ и M проблема селекции ветвей решается путем выделения единственной вещественной ветви. В работе [12] разработана Maple-процедура, которая позволяет вычислять зависимость $E(M)$ при конкретных ϵ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Euler L. *De formulis exponentialibus replicatis* // Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae. - 1778. - V. 1. - P. 38–60.

2. Bernoulli D. *Letter to Goldbach, in Correspondance mathematique et physique de quelles celebres geometres du* XVIII *siecle, Vol. 2 P.-H. von Fuss ed., Imperial Academy of Sciences* // St. Peterburg, 1843. - P. 262.

3. Goldbach C. *Letter to Daniel Bernoulli, in Correspondance mathematique et physique de quelles celebres geometres du* XVIII *siecle, Vol. 2 P.-H. von Fuss ed., Imperial Academy of Sciences* // St. Peterburg, 1843. – P. 280–281.

4. Anderson J. *Iterated exponentials* // Amer. Math. Monthly. – 2004. – V. 111. – No 8. – P. 668–679.

5. Hurwitz S. *On the rational solutions of* $m^n = n^m$ *with* $m \neq n$ // Amer. Math. Monthly. – 1967. – V. 74. – P. 298–300.

6. Galidakis I. N. *On an application of Lambert's W function to infinite exponentials* // Complex Var. Theory Appl. – 2004. – V. 49. – No 11. – P. 759–780.

7. Knoebel A. *Exponentials reiterated* // Amer. Math. Monthly. – 1981. – V. 88. – No 4. – P. 235–252.

8. Буланов А. П. *Бесконечная цепная степень с коэффициентами, принимающими поочередно два значения* // Матем. сб. – 2001. – Т. 192. – № 11. – С. 3–34.

9. Буланов А. П. *Циклические цепные экспоненты как решение системы дифференциальных уравнений* // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2007. – Т. 35. – С. 44–51.

10. Colwell P. *Solving Kepler's Equation over Three Centures.* – Richmond: Willmann-Bell Inc., 1993.

11. Дубинов А. Е., Галидакис И. Н. *Явное решение уравнения Кеплера* // Письма в ЭЧАЯ. – 2007. – Т. 4. – № 3 (139). – С. 365–370.

12. Galidacis I. N. *On solving the p-th complex auxiliary equation* $f^{(p)}(z) = z$ // Complex Variables. – 2005. – V. 50. – No 13. – P. 977–997.